

Rapport des travaux antérieurs

Mes travaux se situent à l'intersection de la logique, de l'informatique et de la théorie des catégories. En bref, mes travaux peuvent se résumer à la conception d'extension des raisonnements algébrique et diagrammatique à une dimension quantitative pour modéliser des distances entre programmes. La série d'articles écrits avec mes encadrant-es de thèse [37, 38, 39] concerne des extensions de la logique équationnelle de Birkhoff et les articles écrits pendant mon postdoctorat [33, 55] concernent des extensions du langage des diagrammes de cordes. Dans ce qui suit, j'explique ces thèmes et je détaille certaine de mes contributions à la recherche actuelle.

Contexte : Sémantique quantitative

Un objectif central de la sémantique des programmes, qui motivait déjà les papiers fondateurs du domaine comme [18], est l'étude de l'équivalence entre programmes. Si la notion précise d'équivalence peut dépendre de la situation, l'idée générale est que deux programmes sont équivalents lorsqu'ils ont des comportements indifférenciés à l'exécution. Ainsi, des programmes qui prennent un entier en entrée et produisent un entier en sortie sont équivalents s'ils renvoient toujours la même valeur pour chaque entier donné. Comme on ne peut pas tester toutes les entrées possibles (car il y en a une infinité), on doit passer par une analyse formelle.

Si on pouvait systématiquement décider si deux programmes donnés ont le même comportement quand on les exécute, on pourrait plus facilement détecter des erreurs d'implémentation ou bien optimiser du code. Même si une solution générale à ce problème ne peut exister,¹ il y a un grand corpus de recherche à ce sujet sous différents points de vue qui ne cesse de grandir, par exemple [24, 36, 47, 49, 50, 57, 60], qui permet une meilleure compréhension du problème et des solutions (efficaces) dans des cas spécifiques.

Toutefois, la notion classique d'équivalence comportementale est parfois trop peu nuancée pour l'analyse de programmes modernes, tout particulièrement ceux qui manipulent des données et des effets quantitatifs ou probabilistes (e.g. des coordonnées GPS, des modèles statistiques, des relevés de capteurs comprenant du bruit, etc.) Détaillons un exemple avec des programmes probabilistes.

Imaginons un langage de programmation avec une fonctionnalité simulant le lancer d'une pièce biaisée pour faire un choix aléatoire : `flip(p)` retourne `true` avec probabilité p et `false` avec probabilité $1 - p$. Même sans connaître la valeur de p , si elle est entre 0 et 1 exclus, on peut écrire un programme (Figure 1) qui se comporte comme le lancer d'une pièce équitable (`flip(0.5)`). Pour prouver la correction du programme à droite, dû à von Neumann [41], il suffit de considérer les possibilités après être sortie de la boucle, quand x et y diffèrent : ou bien x est `true` et y est `false` (avec probabilité $p(1 - p)$), ou bien x est `false` et y est `true` (avec probabilité $(1 - p)p$). Les deux options ont la même probabilité d'arriver, donc si on conditionne sur le fait d'être sorti de la boucle, chaque option a une probabilité de $1/2$. Le fait que p ne soit ni 0 ni 1 nous permet finalement de garantir que

1. C'est une conséquence célèbre de l'indécidabilité du problème de l'arrêt.

```

return flip(0.5)

do
  x = flip(p)
  y = flip(p)
  while (x == y)
    return x

```

FIGURE 1 – Deux programmes équivalents qui n'utilisent pas la même primitive pour les choix aléatoires. (On suppose $0 < p < 1$.)

le programme sortira de la boucle avec probabilité 1. Il retourne donc `true` et `false` avec probabilité $1/2$ chacun, comme le programme à gauche².

L'argument qu'on a donné pour se convaincre que le programme termine (qu'il sort de la boucle) est un peu ad-hoc. Il ne concerne pas directement la logique d'exécution du programme, et il serait difficile de rendre ce raisonnement systématique pour prouver la terminaison de programmes complexes. On peut garantir la terminaison d'une manière explicite en mettant une borne sur le nombre de boucles comme avec le programme suivant (Figure 2). Malheureusement, notre preuve d'équivalence avec une pièce équitable n'est plus valable. Il est maintenant possible que `x` et `y` coïncide à la sortie de la boucle. Même si

```

i = 0
do
  i = i + 1
  x = flip(p)
  y = flip(p)
  while (x == y) AND i <= 1000
    return x

```

FIGURE 2 – Un programme qui simule *presque* une pièce équitable avec une garantie (non)-probabiliste de terminaison.

le programme de la Figure 2 et le simple `return flip(0.5)` ne sont pas équivalents, on voudrait les comparer plus subtilement, car ils sont moins différents l'un de l'autre qu'ils le sont de `return true` par exemple. C'est là qu'entre en scène la sémantique quantitative³.

Le domaine de la sémantique quantitative a émergé pour offrir des notions de comparaison plus fines. Au lieu de s'intéresser à l'équivalence (ou non-équivalence) entre programmes, il est souvent préférable de quantifier les similitudes (ou dissimilitudes) entre programmes. On attribue donc à chaque paire de programme (P, Q) une distance $d(P, Q)$, qui est un nombre petit si P et Q ont des comportements proches, et un nombre grand

2. Cet exemple illustre un autre avantage de la vérification formelle par rapport aux tests. Après des milliers d'exécutions, ces deux programmes produiront rarement la même distribution. Une analyse statistique peut augmenter notre confiance que ces programmes sont équivalents, mais jamais le prouver.

3. Le terme « quantitatif » a parfois une autre signification en sémantique. Il peut désigner l'analyse des utilisations d'une variable dans un programme comme premièrement investigué par Girard [21]. Curieusement, cette signification serait plus à propos dans la section suivante.

à l'inverse. Ainsi, la distance entre la pièce équitale et le programme de la Figure 2 est proportionnelle avec la probabilité de sortir de la boucle avec $x = y$. Elle varie avec la taille de la borne et la différence entre p et $1/2$: plus p est proche de $1/2$, plus la probabilité que i dépasse 1000 avant de sortir de la boucle sera petite ; avec p fixe, on peut aussi réduire la probabilité de sortir de la boucle avec $x = y$ en augmentant la taille de la borne.

Les notions de distance comportementale entre programmes, souvent formalisées par des métriques, font l'objet d'une littérature vaste et toujours active. On mentionne ici quelques workshops récents consacrés à ces questions [2, 29, 30, 42, 43], qui fournissent davantage de références.

Mes contributions : Raisonnement algébrique quantitatif

Durant mon master, j'ai débuté un travail avec Matteo Mio et Valeria Vignudelli sur la caractérisation de (distances entre) programmes. Dans [38], on représente des programmes comportant de l'aléatoire et du non-déterminisme avec la syntaxe suivante : $P +_p Q$ dénote un programme qui exécute P avec probabilité p et Q avec probabilité $1 - p$; $P \oplus Q$ dénote un programme qui choisit d'exécuter P ou Q non-déterministiquement ; **nil** représente un programme qui termine immédiatement.

On postule ensuite des axiomes équationnels pour raisonner algébriquement sur l'équivalence entre programmes. Par exemple, on a $P \oplus Q = Q \oplus P$, car un choix non-déterministe n'est pas sensible à l'ordre de ses options, on a $P +_p P = P = P \oplus P$, car un choix est trivial quand les deux options sont les mêmes. Le raisonnement algébrique permet de dériver d'autres équations à partir des axiomes, e.g.

$$(P \oplus Q) +_p (Q \oplus P) = (P \oplus Q) +_p (P \oplus Q) = P \oplus Q.$$

En se basant sur les travaux de Mardare et al. [35], on postule aussi des axiomes équationnels quantitatifs de la forme $P =_\varepsilon Q$, où $\varepsilon \in [0, 1]$, qu'on interprète comme une borne supérieure de ε sur la distance entre P et Q . Par exemple, $P =_0 P$ exprime que la distance entre un programme et lui-même est en dessous de zéro, donc zéro. Pour un exemple plus intéressant :

$$P =_\varepsilon Q \text{ et } P' =_{\varepsilon'} Q' \implies P +_p Q =_{p\varepsilon + (1-p)\varepsilon'} P' +_p Q'$$

exprime que la distance entre deux programmes obtenus par choix probabiliste est bornée par la combinaison des distances entre leurs composantes. Le raisonnement algébrique quantitatif, développé dans [35], permet de dériver d'autres bornes à partir des axiomes.

Notre résultat principal établit que la plus petite borne dérivable entre deux programmes coïncide avec la distance d'Hausdorff-Kantorovich, qui combine deux distances (Hausdorff et Kantorovich) déjà bien étudiées dans ce contexte [16, 17, 58]. Notre article [38] constitue une extension non triviale de travaux antérieurs [8, 40] consacrés aux programmes non-déterministes et probabilistes, en intégrant la terminaison de plusieurs manières différentes afin de caractériser l'équivalence et la distance comportementale.

Au début de ma thèse, encadrée par Matteo et Valeria, j'ai poursuivi cette direction et je me suis penché sur l'axiomatisation de la distance de Łukaszyk-Karmowski (ŁK), car elle est proche de celle de Kantorovich, et elle a récemment été utilisée pour l'apprentissage

par renforcement [10]. Celle-ci pose problème dans le cadre théorique de Mardare et al. puisque la combinaison convexe n'est pas une opération lipschitzienne et la distance $\mathbb{L}K$ n'est pas une métrique, deux conditions nécessaires dans [35].

Dans [37], on introduit la notion d'un *relèvement d'une signature* qui permet de relaxer cette première condition et traiter les opérations non lipschitziennes. On généralise aussi la notion de distance pour relaxer la deuxième condition. Après avoir démontré que la majorité des résultats de l'article original [35] sont toujours valides, on obtient une axiomatisation de la distance $\mathbb{L}K$.

Nous avons conçu la notion de relèvement d'une signature en suivant une tradition de l'algèbre catégorique qui se base sur les foncteurs. Cela a d'ailleurs permis à Jurka et al. [27] de généraliser notre cadre au-delà des distances pour étudier les structures relationnelles arbitraires. Cependant, en préparant une version étendue de [37], nous avons décidé de délaissier cette notion pour nous rapprocher du raisonnement algébrique classique.

L'approche qu'on propose dans [39] unifie plus simplement le raisonnement algébrique et le raisonnement quantitatif. En particulier, le système logique développé ressemble singulièrement à la logique équationnelle de Birkhoff [5], omniprésente en sémantique algébrique. Cela mène à un nouveau résultat qui simplifie plusieurs preuves d'axiomatisation quantitative : toute distance concrète définie sur une structure algébrique peut être axiomatisée à partir de l'axiomatisation purement algébrique de la structure sous-jacente. Ce résultat est constructif (les axiomes sont explicitement fournis) et couvre la grande majorité des axiomatisations algébriques quantitatives existantes⁴.

Mon manuscrit de thèse est largement basé sur [39], mais le deuxième chapitre sur les *espaces métriques généralisés* accomplit deux objectifs.

1. J'ai généralisé une dernière fois la notion de distance. Cette fois, la distance entre deux éléments n'est plus forcément un nombre réel. Cela permet de mettre sous un même toit le raisonnement algébrique sur les espaces métriques et le raisonnement algébrique sur les espaces ordonnés, ce dernier étant largement étudié en sémantique [22, 23, 56].
2. J'ai réifié la notion d'axiomes sur les distances pour qu'ils fassent partie intégrale des axiomatisations, ce qui clarifie davantage la frontière entre raisonnement algébrique et raisonnement quantitatif.

Autres travaux Mon deuxième stage de master était supervisé par Daniela Petrişan. On a travaillé sur des aspects théoriques de la combinaison du non-déterminisme et du probabilisme. Nos résultats ont été publiés dans [45], avec notamment une conjecture qui a été résolue par Rosset et al. dans [51].

Durant ma thèse, j'ai visité l'université McGill pendant un trimestre pour travailler avec Prakash Panangaden, un auteur de [35]. Nos travaux n'ont pas encore abouti à la rédaction d'un article, mais notre collaboration m'a valu une première invitation à un workshop plutôt select organisé par Prakash et Alexandra Silva à l'institut de recherche de Bellairs. C'est là que j'ai pu discuter avec Fabio Zanasi de la motivation derrière nos travaux actuels sur les diagrammes de cordes que j'explique ci-dessous.

4. Une exception notable est le résultat principal de [52].

Contexte : Sémantique diagrammatique

L'analyse de programmes comme ceux des Figures 1 et 2 requiert une étape de traduction vers la syntaxe algébrique. Cela comporte une subtilité qu'on illustre dans la Figure 3. À gauche, on assigne la valeur d'un lancer de pièce équitable (true ou false) à x , puis on

```
x = flip(0.5)
return x or x
```

```
return flip(0.5) or flip(0.5)
```

FIGURE 3 – Le programme à droite résulte d'une application de la substitution dans le programme de gauche. Ils ne sont pourtant pas équivalents.

retourne la disjonction de x avec lui-même. Comme la disjonction est idempotente, c'est comme si on retournait x , donc on obtient true et false 50% du temps chacun. À droite, on a combiné les deux lignes en appliquant une substitution : on a remplacé x dans la deuxième instruction par l'expression qu'on lui assigne dans la première. Cependant, rien ne nous indique que les deux lancers de pièces sont corrélés, alors on doit considérer que les quatre options possibles ($\langle \text{true}, \text{true} \rangle$, $\langle \text{true}, \text{false} \rangle$, $\langle \text{false}, \text{true} \rangle$, $\langle \text{false}, \text{false} \rangle$) se produisent avec probabilité $1/4$ chacune. Après la disjonction, on obtient true 75% du temps et false 25% du temps. Les deux programmes ne sont donc pas équivalents.

La substitution étant un pilier central du raisonnement algébrique, ce la pose des difficultés dans la traduction. On dit que la syntaxe algébrique est cartésienne alors que la syntaxe des programmes (ceux considérés ici) ne l'est pas. Cette dernière est parfois dite monoïdale ou bien linéaire. Plus verbeusement, les programmes probabilistes sont sensibles à l'utilisation des ressources ou à la gestion des variables. C'est pourquoi ils sont plus fidèlement représenté par des diagrammes de cordes.

Les diagrammes de cordes—qui prennent leur origine dans une syntaxe informelle de Penrose [44] et qui ont ensuite été formalisés pour leur utilisation en théorie des catégories par Joyal et Street [26]—sont depuis quelques années reconnus pour leur justesse dans la modélisation compositionnelle de procédés et de systèmes divers, notamment en informatique quantique [3, 13, 14, 25, 48], en théorie de la probabilité [19, 46, 59], en apprentissage [15, 61] et même dans des domaines a priori plus éloignés comme la linguistique [12, 28], l'épidémiologie [4, 31] et la chimie [20, 34].

Concrètement, un diagramme de cordes est une représentation visuelle d'un morphisme dans une catégorie monoïdale, ce dernier étant le plus souvent l'incarnation mathématique d'un procédé dans un sens très large du terme. Plusieurs exemples de diagrammes tirés de mes papiers sont dans la Figure 4.

La syntaxe peut s'apparenter à celles des diagrammes techniques pour les circuits électroniques et c'est parfois une bonne intuition à garder, mais les diagrammes de cordes sont beaucoup plus expressifs (voir les papiers cités ci-dessus). Un argument central pour utiliser ces diagrammes dans les applications ci-dessus est qu'ils sont considérés modulo les déformations continues et donc permettent une meilleure visualisation de la sémantique. Quand on bouge les cordes et les composantes sans casser de cordes et sans changer l'ordre des entrées et des sorties du diagramme, on ne change pas l'interprétation

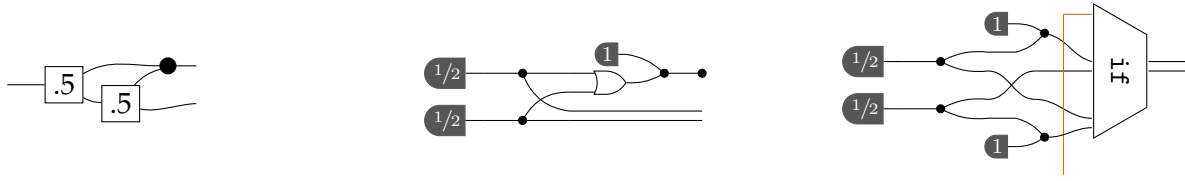
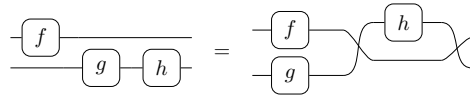


FIGURE 4 – Trois exemples de diagrammes de cordes.

du diagramme, les deux diagrammes sont même considérés comme étant égaux :

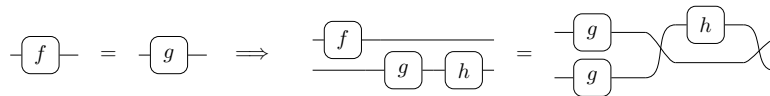


Écrit avec la notation classique, cette équation devient

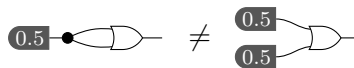
$$(f \otimes \text{id}) ; (\text{id} \otimes (g ; h)) = (f \otimes g) ; \sigma ; (h \otimes \text{id}) ; \sigma,$$

ce qui est nettement moins lisible. De plus, l'intuition visuelle derrière les déformations et les axiomes additionnels reflète souvent l'intuition opérationnelle sur les procédés représentés. Par exemple, dans les diagrammes ci-dessus, comme f et g sont composés en parallèle et ne partagent pas d'information, leur ordre d'exécution n'est pas important, ainsi on a pu glisser g sous f sans changer le sens du diagramme.

On parle de raisonnement diagrammatique quand on dérive des équations entre diagrammes en appliquant ces déformations ainsi que des axiomes donnés : si on sait que les diagrammes \boxed{f} et \boxed{g} sont égaux, alors on peut remplacer f par g à chaque fois qu'il apparaît dans un plus grand diagramme :



Pour étudier l'équivalence entre programmes, ils sont maintenant représentés par des diagrammes : il y a des boîtes qui représentent les primitives d'un langage ; les deux dimensions de composition (gauche à droite et haut en bas) représentent respectivement les compositions séquentielles et parallèles ; et l'équivalence entre programmes est caractérisée par des axiomes équationnels avec le raisonnement diagrammatique. La réutilisation d'une variable est maintenant explicité par le diagramme \curvearrowright qu'on interprète comme nœud qui copie son entrée en deux sorties identiques. La traduction des programmes de la Figure 3 produit deux diagrammes qui ne sont pas égaux.



Remarque : Bien que les diagrammes de cordes peuvent sembler inhabituels comme objet d'étude, leur emploi est fondé sur des motivations solides, comme la gestion explicite des ressources et la manipulation visuelle de concepts abstraits. Je développe encore d'autres avantages dans mon projet de recherche.

Mes contributions : Extensions du raisonnement diagrammatique

Ma collaboration avec Fabio Zanasi a débuté lors d'un workshop [42], autour de l'ajout d'une dimension quantitative au raisonnement diagrammatique, en combinant mon expertise et la sienne. Après une visite de recherche de deux semaines en juillet 2023, j'ai rejoint son équipe à *University College London* comme postdoctorant. Cela a conduit à un article commun [33], coécrit avec Gabriele Lobbia et Wojciech Różowski, qui pose des bases du raisonnement diagrammatique quantitatif, que je ne développe pas ici.

En parallèle, je me suis penché sur une autre extension des diagrammes de cordes inspiré par un projet à Londres financé par l'*Advanced Research + Invention Agency* (ARIA) sur l'application des méthodes formelles pour assurer la fiabilité de l'intelligence artificielle [1]⁵. ARIA organise régulièrement des workshops durant lesquels j'ai pu échanger avec d'autres chercheurs et chercheuses, notamment les groupes dirigés par Filippo Bonchi à Pise, Paweł Sobociński à Tallinn et Sam Staton à Oxford.

J'ai alors étudié longuement deux papiers présentés à ces rencontres : le premier [46] donne une axiomatisation diagrammatique d'un langage probabiliste discret ; le second [32] décrit une solution alternative au problème de la combinaison des choix non-déterministes et probabilistes via la notion de monade graduée. Fort de mon expertise sur la combinaison du non-déterminisme et du probabilisme ainsi que sur les diagrammes de cordes, j'ai pu rapidement obtenir des résultats intéressants en croisant les idées de ces deux papiers.

Dans [55], on introduit une syntaxe diagrammatique pour les morphismes d'une catégorie monoïdale graduées. Celle-ci étend les diagrammes de cordes classiques en rajoutant des cordes qui pendent vers le bas et indique que des entrées auxiliaires sont prises en compte par le procédé représenté (voir la corde orange dans le troisième diagramme de la Figure 4). Dans notre application principale (inspirée de [46] et [32]), les diagrammes représentent des procédés stochastiques qui ont accès, via ces entrées auxiliaires, à une source d'aléa non-déterministe.

Notre article [55] a fait l'objet d'une invitation à soumettre une version longue [54] dans la revue *Logical Methods in Computer Science*.

Je mentionne ici que mon initiation à la recherche sur les diagrammes de cordes s'est faite en 2022 durant l'école de recherche associée à la conférence *Applied Category Theory*. J'avais travaillé sur le projet de Filippo Bonchi sur la représentation de relations et de programmes avec les diagrammes de rubans (*tape diagrams*) [7], une autre extension des diagrammes de corde. Ce projet a depuis mené à d'autres papiers [6, 9] que je mentionnerais dans mon projet de recherche.

Médiation scientifique

La diffusion des connaissances scientifiques à tout public est selon moi un aspect très important de la vie académique, donc je voudrais discuter de mes activités de médiation.

Durant ma thèse, j'ai pu animé des ateliers et des visites guidées de l'exposition *Dans ma cuisine* pour des classes de collège et lycée, en tant que bénévole à la *Maison des*

5. Ce projet a les mêmes objectifs concrets que le projet ANR *Safe AI through Formal methods* (SAIF) [53], mais mobilise les outils mathématiques utilisés sont différents.

Mathématiques et de l'Informatique. Durant des stages organisés par l'organisation *Un Peu de Bon Science*, j'ai initié des lycéen·es à la recherche en informatique en leur faisant découvrir les diagrammes de cordes et la vie quotidienne dans un laboratoire. À l'école North Bridge House Senior Hampstead à Londres, j'ai organisé et animé un mini-cours de deux jours sur le calcul ZX [11], une application des diagrammes de cordes pour le calcul quantique.

Ces deux derniers points me tiennent tout particulièrement à cœur, car ils montrent qu'il est possible d'aborder des sujets à la pointe de la recherche dans mon domaine avec des élèves non initié·es.

Références

- [1] ARIA. *Safeguarded AI Programme Thesis*. 2024. URL : <https://www.aria.org.uk/wp-content/uploads/2024/01/ARIA-Safeguarded-AI-Programme-Thesis-V1.pdf>.
- [2] Giovanni BACCI et Florence CLERC. *25th Workshop on Boolean Models and Quantum Logic (BMQL 2025)*. <https://bmql25.cs.aau.dk/>. Accessed : 2025-12-08.
- [3] Miriam BACKENS et al. « Completeness of the ZH-calculus ». In : *Compositionality Volume 5* (2023), 5 (2023). ISSN : 2631-4444. DOI : 10.32408/compositionality-5-5. URL : <https://compositionality.episciences.org/13524>.
- [4] John C. BAEZ et al. « A Categorical Framework for Modeling with Stock and Flow Diagrams ». In : *Mathematics of Public Health : Mathematical Modelling from the Next Generation*. Sous la dir. de Jummy DAVID et Jianhong WU. Cham : Springer International Publishing, 2023, p. 175-207. ISBN : 978-3-031-40805-2. DOI : 10.1007/978-3-031-40805-2_8. URL : https://doi.org/10.1007/978-3-031-40805-2_8.
- [5] Garrett BIRKHOFF. « On the Structure of Abstract Algebras ». In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 31.4 (1935), 433–454. DOI : 10.1017/S0305004100013463.
- [6] Filippo BONCHI, Alessandro DI GIORGIO et Elena DI LAVORE. « A Diagrammatic Algebra for Program Logics ». In : *Foundations of Software Science and Computation Structures*. Sous la dir. de Parosh Aziz ABDULLA et Delia KESNER. Cham : Springer Nature Switzerland, 2025, p. 308-330. ISBN : 978-3-031-90897-2.
- [7] Filippo BONCHI, Alessandro DI GIORGIO et Alessio SANTAMARIA. « Deconstructing the Calculus of Relations with Tape Diagrams ». In : *Proc. ACM Program. Lang.* 7.POPL (2023). DOI : 10.1145/3571257. URL : <https://doi.org/10.1145/3571257>.
- [8] Filippo BONCHI, Ana SOKOLOVA et Valeria VIGNUDELLI. « The Theory of Traces for Systems with Nondeterminism and Probability ». In : *34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2019, Vancouver, BC, Canada, June 24-27, 2019*. IEEE, 2019, 1–14. DOI : 10.1109/LICS.2019.8785673. URL : <https://doi.org/10.1109/LICS.2019.8785673>.
- [9] Filippo BONCHI et al. « Tape Diagrams for Monoidal Monads ». In : *11th Conference on Algebra and Coalgebra in Computer Science (CALCO 2025)*. Sous la dir. de Corina CÎRSTEĂ et Alexander KNAPP. T. 342. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2025, 11 :1-11 :24. ISBN : 978-3-95977-383-6. DOI : 10.4230/LIPIcs.CALCO.2025.11. URL : <https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CALCO.2025.11>.
- [10] Pablo Samuel CASTRO et al. « MICo : Improved representations via sampling-based state similarity for Markov decision processes ». In : (juin 2021). arXiv : 2106.08229 [cs.LG].
- [11] B. COECKE et S. GOGIOSO. *Quantum in Pictures*. Quantinuum, 2022.

- [12] B. COECKE, M. SADRZADEH et S. CLARK. « Mathematical Foundations for Distributed Compositional Model of Meaning ». In : *Linguistic Analysis* 36 (2010). Lambek Festschrift, J. van Benthem, M. Moortgat, and W. Buszkowski (eds.), p. 345-384.
- [13] Bob COECKE et Ross DUNCAN. « Interacting quantum observables : categorical algebra and diagrammatics ». In : *New Journal of Physics* 13.4 (2011), p. 043016. DOI : 10.1088/1367-2630/13/4/043016. URL : <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/13/4/043016>.
- [14] Bob COECKE et Aleks KISSINGER. *Picturing quantum processes. A first course in quantum theory and diagrammatic reasoning*. English. Cambridge : Cambridge University Press, 2017. ISBN : 978-1-107-10422-8; 978-1-316-21931-7. DOI : 10.1017/9781316219317.
- [15] Geoffrey S. H. CRUTTWELL et al. « Categorical foundations of gradient-based learning ». English. In : *Programming languages and systems. 31st European symposium on programming, ESOP 2022, held as part of the European joint conferences on theory and practice of software, ETAPS 2022, Munich, Germany, April 2–7, 2022. Proceedings*. Cham : Springer, 2022, p. 1-28. ISBN : 978-3-030-99335-1; 978-3-030-99336-8. DOI : 10.1007/978-3-030-99336-8_1.
- [16] Norm FERNS, Prakash PANANGADEN et Doina PRECUP. « Bisimulation metrics for continuous Markov decision processes ». In : *SIAM J. Comput.* 40.6 (2011), p. 1662-1714. ISSN : 0097-5397,1095-7111. DOI : 10.1137/10080484X. URL : <https://doi.org/10.1137/10080484X>.
- [17] Norm FERNS, Prakash PANANGADEN et Doina PRECUP. « Metrics for finite Markov decision processes ». In : *Proceedings of the 20th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. UAI '04. Banff, Canada : AUAI Press, 2004, 162–169. ISBN : 0974903906.
- [18] Robert W. FLOYD. « Assigning Meanings to Programs ». In : *Program Verification : Fundamental Issues in Computer Science*. Sous la dir. de Timothy R. COLBURN, James H. FETZER et Terry L. RANKIN. Dordrecht : Springer Netherlands, 1993, p. 65-81. ISBN : 978-94-011-1793-7. DOI : 10.1007/978-94-011-1793-7_4. URL : https://doi.org/10.1007/978-94-011-1793-7_4.
- [19] Tobias FRITZ. « A synthetic approach to Markov kernels, conditional independence and theorems on sufficient statistics ». In : *Advances in Mathematics* 370 (2020), p. 107239. ISSN : 0001-8708. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107239>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870820302656>.
- [20] Ella GALE, Leo LOBSKI et Fabio ZANASI. « A categorical approach to synthetic chemistry ». English. In : *Theoretical aspects of computing – ICTAC 2023. 20th international colloquium, Lima, Peru, December 4–8, 2023. Proceedings*. Cham : Springer, 2023, p. 276-294. ISBN : 978-3-031-47962-5; 978-3-031-47963-2. DOI : 10.1007/978-3-031-47963-2_17.
- [21] Jean-Yves GIRARD. « Normal functors, power series and λ -calculus ». In : *Ann. Pure Appl. Logic* 37.2 (1988), p. 129-177. ISSN : 0168-0072,1873-2461. DOI : 10.1016/0168-0072(88)90025-5. URL : [https://doi.org/10.1016/0168-0072\(88\)90025-5](https://doi.org/10.1016/0168-0072(88)90025-5).

- [22] J. A. GOGUEN et al. « Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras ». In : *J. ACM* 24.1 (1977), 68–95. ISSN : 0004-5411. DOI : 10.1145/321992.321997. URL : <https://doi.org/10.1145/321992.321997>.
- [23] Joseph A. GOGUEN et José MESEGUER. « Order-sorted algebra I : equational deduction for multiple inheritance, overloading, exceptions and partial operations ». In : *Theoretical Computer Science* 105.2 (1992), p. 217-273. ISSN : 0304-3975. DOI : [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(92\)90302-V](https://doi.org/10.1016/0304-3975(92)90302-V). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030439759290302V>.
- [24] Sergey GONCHAROV et al. « Bialgebraic Reasoning on Higher-order Program Equivalence ». In : *Proceedings of the 39th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. LICS '24. Tallinn, Estonia : Association for Computing Machinery, 2024. ISBN : 9798400706608. DOI : 10.1145/3661814.3662099. URL : <https://doi.org/10.1145/3661814.3662099>.
- [25] Emmanuel JEANDEL, Simon PERDRIX et Renaud VILMART. « Completeness of the ZX-calculus ». In : *Log. Methods Comput. Sci.* 16.2 (2020), Paper No. 11, 72. ISSN : 1860-5974. DOI : 10.23638/LMCS-16(2:11)2020. URL : [https://doi.org/10.23638/LMCS-16\(2:11\)2020](https://doi.org/10.23638/LMCS-16(2:11)2020).
- [26] André JOYAL et Ross STREET. « The geometry of tensor calculus. I ». In : *Adv. Math.* 88.1 (1991), p. 55-112. ISSN : 0001-8708,1090-2082. DOI : 10.1016/0001-8708(91)90003-P. URL : [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(91\)90003-P](https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90003-P).
- [27] Jan JURKA, Stefan MILIUS et Henning URBAT. « Algebraic Reasoning over Relational Structures ». In : *Electronic Notes in Theoretical Informatics and Computer Science* Volume 4 - Proceedings of MFPS XL, 13 (2024). ISSN : 2969-2431. DOI : 10.46298/entics.14598. URL : <https://entics.episciences.org/14598>.
- [28] Dimitri KARTSAKLIS et al. « lambeq : An Efficient High-Level Python Library for Quantum NLP ». In : *CoRR* abs/2110.04236 (2021). arXiv : 2110.04236. URL : <https://arxiv.org/abs/2110.04236>.
- [29] Barbara KÖNIG et al. *Behavioural Metrics and Quantitative Logics (Dagstuhl Seminar 24432)*. Dagstuhl, Germany, 2024. DOI : 10.4230/DagRep.14.10.58. URL : <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2024/16723/>.
- [30] Ugo Dal LAGO, Francesco GAVAZZO et Paolo PISTONE. *Formal and Operational Proof Systems and Semantics (FOPSS) School 2023*. <https://site.unibo.it/fopss2023/en>. Accessed : 2025-12-08.
- [31] Sophie LIBKIND et al. « An algebraic framework for structured epidemic modelling ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 380.2233 (août 2022). ISSN : 1471-2962. DOI : 10.1098/rsta.2021.0309. URL : <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2021.0309>.
- [32] Jack LIELL-COCK et Sam STATON. « Compositional Imprecise Probability : A Solution from Graded Monads and Markov Categories ». In : *Proc. ACM Program. Lang.* 9.POPL (jan. 2025). DOI : 10.1145/3704890. URL : <https://doi.org/10.1145/3704890>.

- [33] Gabriele LOBBIA et al. « Quantitative Monoidal Algebra : Axiomatising Distance with String Diagrams ». In : *50th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2025)*. Sous la dir. de Paweł GAWRYCHOWSKI, Filip MAZOWIECKI et Michał SKRZYPCZAK. T. 345. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2025, 68 :1-68 :21. ISBN : 978-3-95977-388-1. DOI : 10.4230/LIPIcs.MFCS.2025.68. URL : <https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.MFCS.2025.68>.
- [34] Leo LOBSKI et Fabio ZANASI. « String diagrams for layered explanations ». English. In : *Proceedings of the fifth international conference on applied category theory, ACT 2022, Glasgow, United Kingdom, July 18–22, 2022*. Waterloo : Open Publishing Association (OPA), 2023, p. 362-382. DOI : 10.4204/EPTCS.380.21.
- [35] Radu MARDARE, Prakash PANANGADEN et Gordon D. PLOTKIN. « Quantitative Algebraic Reasoning ». In : *Proceedings of the 31st Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS '16, New York, NY, USA, July 5-8, 2016*. Sous la dir. de Martin GROHE, Eric KOSKINEN et Natarajan SHANKAR. ACM, 2016, 700–709. DOI : 10.1145/2933575.2934518. URL : <https://doi.org/10.1145/2933575.2934518>.
- [36] Robin MILNER. « Calculi for synchrony and asynchrony ». In : *Theoretical Computer Science* 25.3 (1983), p. 267-310. ISSN : 0304-3975. DOI : [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(83\)90114-7](https://doi.org/10.1016/0304-3975(83)90114-7). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397583901147>.
- [37] Matteo MIO, Ralph SARKIS et Valeria VIGNUDELLI. « Beyond Nonexpansive Operations in Quantitative Algebraic Reasoning ». In : *Proceedings of the 37th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science. LICS '22. Haifa, Israel : Association for Computing Machinery, 2022*. ISBN : 9781450393515. DOI : 10.1145/3531130.3533366. URL : <https://doi.org/10.1145/3531130.3533366>.
- [38] Matteo MIO, Ralph SARKIS et Valeria VIGNUDELLI. « Combining Nondeterminism, Probability, and Termination : Equational and Metric Reasoning ». In : *2021 36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. 2021, 1–14. DOI : 10.1109/LICS52264.2021.9470717. URL : <https://arxiv.org/abs/2012.00382>.
- [39] Matteo MIO, Ralph SARKIS et Valeria VIGNUDELLI. « Universal Quantitative Algebra for Fuzzy Relations and Generalised Metric Spaces ». In : *Logical Methods in Computer Science* Volume 20, Issue 4, 19 (2024). ISSN : 1860-5974. DOI : 10.46298/lmcs-20(4:19)2024. URL : <https://lmcs.episciences.org/12339>.
- [40] Matteo MIO et Valeria VIGNUDELLI. « Monads and Quantitative Equational Theories for Nondeterminism and Probability ». In : *31st International Conference on Concurrency Theory (CONCUR 2020)*. Sous la dir. d'Igor KONNOV et Laura KOVÁCS. T. 171. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2020, 28 :1-28 :18. ISBN : 978-3-95977-160-3. DOI : 10.4230/LIPIcs.CONCUR.2020.28. URL : <https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CONCUR.2020.28>.

- [41] John von NEUMANN. « Various Techniques Used in Connection with Random Digits ». In : *National Bureau of Standards Applied Math Series*. Sous la dir. de G. E. FORSYTHE. T. 12. Reprinted in von Neumann's Collected Works, Volume 5, Pergamon Press, 1963, pp. 768–770. National Bureau of Standards, 1951, p. 36-38.
- [42] Prakash PANANGADEN et Alexandra SILVA. *Behavioural Metrics and Quantitative Logics – Bellairs Workshop 2023*. <https://cs.mcgill.ca/~prakash/Bellairs/23/wshop23.html>. Accessed : 2025-12-08.
- [43] Prakash PANANGADEN et Alexandra SILVA. *Behavioural Metrics and Quantitative Logics – Bellairs Workshop 2025*. <https://cs.mcgill.ca/~prakash/Bellairs/25/wshop25.html>. Accessed : 2025-12-08.
- [44] Roger PENROSE. « Applications of negative dimensional tensors ». In : *Combinatorial Mathematics and its Applications (Proc. Conf., Oxford, 1969)*. Academic Press, London-New York, 1971, p. 221-244.
- [45] Daniela PETRIŞAN et Ralph SARKIS. « Semialgebras and Weak Distributive Laws ». In : *Proceedings 37th Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics, MFPS 2021, Hybrid : Salzburg, Austria and Online, 30th August - 2nd September, 2021*. Sous la dir. d'Ana SOKOLOVA. T. 351. EPTCS. 2021, p. 218-241. DOI : 10.4204/EPTCS.351.14. URL : <https://doi.org/10.4204/EPTCS.351.14>.
- [46] Robin PIEDELEU et al. « A Complete Axiomatisation of Equivalence for Discrete Probabilistic Programming ». In : *Programming Languages and Systems*. Sous la dir. de Viktor VAFEIADIS. Cham : Springer Nature Switzerland, 2025, p. 202-229. ISBN : 978-3-031-91121-7.
- [47] Andrew PITTS. « Operationally-based theories of program equivalence ». English. In : *Semantics and logics of computation. Summer school at the Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, GB, September 1995*. Cambridge : Cambridge University Press, 1997, p. 241-298. ISBN : 0-521-58057-9.
- [48] Boldizsár POÓR et al. « Completeness for arbitrary finite dimensions of ZXW-calculus, a unifying calculus ». In : *2023 38th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*. IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 2023, p. 14. ISBN : 979-8-3503-3587-3.
- [49] Damien POUS. « New up-to techniques for weak bisimulation ». In : *Theor. Comput. Sci.* 380.1–2 (juill. 2007), 164–180. ISSN : 0304-3975. DOI : 10.1016/j.tcs.2007.02.060. URL : <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2007.02.060>.
- [50] John POWER. « Towards a theory of mathematical operational semantics ». English. In : *CMCS'03 : Coalgebraic methods in computer science. Proceedings of the 6th workshop (satellite event of ETAPS 2003), Warsaw, April 5–6, 2003*. Amsterdam : Elsevier, 2003, p. 257-272. URL : www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571066104806431.

- [51] Aloïs ROSSET, Helle Hvid HANSEN et Jörg ENDRULLIS. « Algebraic Presentation of Semifree Monads ». In : *Coalgebraic Methods in Computer Science*. Sous la dir. d'Helle Hvid HANSEN et Fabio ZANASI. Cham : Springer International Publishing, 2022, p. 110-132. ISBN : 978-3-031-10736-8.
- [52] Wojciech RÓŻOWSKI. « A Complete Quantitative Axiomatisation of Behavioural Distance of Regular Expressions ». In : *51st International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2024)*. Sous la dir. de Karl BRINGMANN et al. T. 297. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2024, 149 :1-149 :20. ISBN : 978-3-95977-322-5. DOI : 10.4230/LIPIcs.ICALP.2024.149. URL : <https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.ICALP.2024.149>.
- [53] SAIF - *Safe AI through Formal Methods*. <https://anr.fr/Project-ANR-23-PEIA-0006>. French National Research Agency (ANR) research project funded under France 2030 initiative. ANR, 2023. URL : <https://anr.fr/Project-ANR-23-PEIA-0006>.
- [54] Ralph SARKIS et Fabio ZANASI. *Graded String Diagrams for Imprecise Probability and Causal Intervention*. 2026. arXiv : 2501.18404 [math.CT]. URL : <https://arxiv.org/abs/2501.18404>.
- [55] Ralph SARKIS et Fabio ZANASI. « String Diagrams for Graded Monoidal Theories, with an Application to Imprecise Probability ». In : *11th Conference on Algebra and Coalgebra in Computer Science (CALCO 2025)*. Sous la dir. de Corina CÎRSTEĂ et Alexander KNAPP. T. 342. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2025, 5 :1-5 :23. ISBN : 978-3-95977-383-6. DOI : 10.4230/LIPIcs.CALCO.2025.5. URL : <https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.CALCO.2025.5>.
- [56] Dana SCOTT et Christopher STRACHEY. « Toward a Mathematical Semantics for Computer Languages ». In : *Proceedings of the Symposium on Computers and Automata*. T. 21. 1971.
- [57] Alex SIMPSON et Niels VOORNEVELD. « Behavioural Equivalence via Modalities for Algebraic Effects ». In : *ACM Trans. Program. Lang. Syst.* 42.1 (nov. 2019). ISSN : 0164-0925. DOI : 10.1145/3363518. URL : <https://doi.org/10.1145/3363518>.
- [58] Jinhua SONG et al. « Measuring the Distance Between Finite Markov Decision Processes ». In : *Proceedings of the 2016 International Conference on Autonomous Agents & Multiagent Systems*. AAMAS '16. Singapore, Singapore : International Foundation for Autonomous Agents et Multiagent Systems, 2016, 468–476. ISBN : 9781450342391.
- [59] Dario STEIN et al. *Graphical Quadratic Algebra*. 2024. arXiv : 2403.02284 [cs.LO]. URL : <https://arxiv.org/abs/2403.02284>.
- [60] D. TURI et G. PLOTKIN. « Towards a mathematical operational semantics ». In : *Proceedings of Twelfth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. 1997, p. 280-291. DOI : 10.1109/LICS.1997.614955.

- [61] Paul WILSON et Fabio ZANASI. « Categories of differentiable polynomial circuits for machine learning ». In : *Graph transformation*. T. 13349. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Cham, 2022, p. 77-93. ISBN : 978-3-031-09842-0; 978-3-031-09843-7. DOI : 10.1007/978-3-031-09843-7_5. URL : https://doi.org/10.1007/978-3-031-09843-7_5.